**Problème 040 – Les impressions d’Instagram – Corrigé**

1) a) Calculer u1 = 0,9 x u0 = 0,9 x 80 = 72

u2 = 0,9 x u1 = 0,9 x 72 = 64,8

u3 = 0,9 x u2 = 0,9 x 64,8 = 58,32

u4 = 0,9 x u3 = 0,9 x 58,32 52,49

b) En suivant la logique précédente, le 5ème jour, Delphine perd encore 10% par rapport au 4ème jour, mais elle gagne 80 impressions grâce à la publication de sa photo. De ce fait, on a :  
u5 = 0,9 x u4 + 80 donc c’est bien u5 = 0,95 x u0 + 80.

2) a) Montrons que vn+1 = 0,95 x vn + 80.

On a : v1 = u5 = 0,95 x u0 + 80 = 0,95 x v0 + 80 (selon la question 1b))

On étend le même principe : vn+1 = u5n+5 = 0,95 x u5n + 80 = 0,95 x vn + 80

b) On a : r = 195,35

Initialisation :

v1 = 0,95 x v0 + 80 = 0,95 x 80 + 80 = 127,23

Donc on a bien v0 < v1 < r

Hérédité :

Supposons qu’au rang k : vk < vk+1 < r

Donc 0,95 x vk < 0,95 x vk+1 < 0,95 x r

Et 0,95 x vk + 80< 0,95 x vk+1 + 80 < 0,95 x r + 80

Or 0,95 x r + 80 = 0,95 x + 80 = + = r

Donc on a bien vk+1 < vk+2 < r

On a donc démontré la propriété au rang k+1

Conclusion :

(vn) est une suite croissante majorée par r.

c) On en déduit, d’après le théorème de convergence monotone, que la suite (vn) converge.

3) a) On a wn+1 = vn+1 – r

Donc wn+1 = 0,95 x vn + 80 – r

Donc wn+1 = 0,95 x (wn + r) + 80 – r

wn+1 = 0,95 x wn + 0,95 r + 80 – r

wn+1 = 0,95 x wn + r (0,95 – 1) + 80

wn+1 = 0,95 x wn + x (0,95 – 1) + 80

wn+1 = 0,95 x wn – 80 + 80 = 0,95 x wn

De plus w0 = v0 – r = 80 - =

(wn) est donc une suite géométrique de premier terme w0  et de raison q = 0,95

b) On a donc : wn

Ainsi vn + )

c) On a 0,95 < 1

Donc

Donc

Et vn = = r.

d) r est la limite que Delphine qu’elle recherche quand chaque fois qu’elle publiera, donc tous les 5 jours. Toutefois, le jour suivant une publication, le nombre d’impressions chute de 10% et ainsi de suite pendant 4 jours, ce qui veut dire que un ne converge pas vers r (en langage mathématique : Il suffit de prendre et de prendre n = N+1, puisque la chute est de 10%).

.